Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko
(podiplomski študij matematike, izobraževalna smer)

Seminarska naloga

Vstavljanje in pokrivanje likov

(Fits and Covers)

Andrej Hauptman

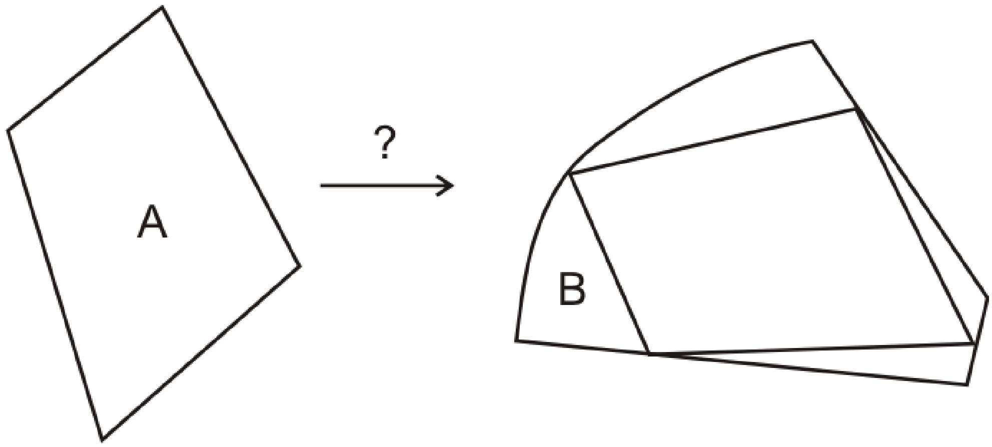
Mentor: prof. dr. Milan Hladnik

Ljubljana, avgust 2010

Kazalo

1 Uvod

Glavno vprašanje, s katerim sem se ukvarjal v tem seminarju je, ali lahko lik A vstavimo v lik B oz. ali lik B pokrije lik A (slika 1)?



Slika 1: Lik B pokrije lik A

Lastnost pokrivanja oz. vstavljanja bom predstavil na naslednjih likih:

- Trikotnik in krog
- Trikotnik in pravokotnik (kvadrat)
- Pravokotnik in pravokotnik
- Enakostranični trikotnik in trikotnik
- Trikotnik in trikotnik

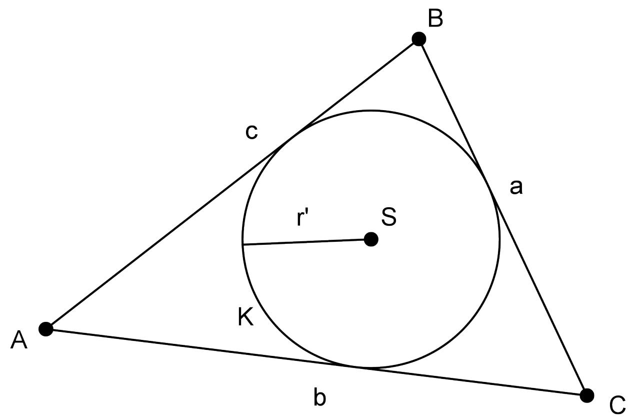
2 Trikotnik in krog

Ko opazujemo lastnost pokrivanja oz. vstavljanja pri trikotniku in krogu, ločimo dve situaciji. Prvo vprašanje, ki se nam zastavi je, ali lahko krog vstavimo v trikotnik, drugo vprašanje pa je, ali lahko trikotnik vstavimo v krog. Poglejmo si obe situaciji.

2.1 Krog v trikotniku

Glavno vprašanje v tem podrazdelku je, ali lahko nek krog vstavimo v dan trikotnik. Označimo dan trikotnik z običajnimi oznakami (trikotnik ABC s stranicami a (= stranica BC), b (= stranica CA) in c (= stranica AB)). Označimo tudi krog K s polmerom r' oz. premerom d' ($d' = 2r'$).

Hitro lahko ugotovimo, da je največji krog, ki ga lahko vstavimo v dan trikotnik, ravno včrtan krog trikotniku (slika 2).



Slika 2: Včrtan krog

Torej lahko krog K vstavimo v trikotnik ABC le, če je polmer danega kroga manjši ali enak polmeru včrtanega kroga trikotniku. Pri izračunu si pomagamo s Heronovimi obrazci za izračun polmera včrtanega kroga trikotniku:

$$r = \frac{2p}{a+b+c}$$

$$p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

Poiskusimo poenostaviti formule tako, da jih združimo v en pogoj:

$$r = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a+b+c} = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{2\sqrt{s^2}} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

Vstavimo s in okrajšajmo:

$$r = \sqrt{\frac{(\frac{a+b+c}{2}-a)(\frac{a+b+c}{2}-b)(\frac{a+b+c}{2}-c)}{\frac{a+b+c}{2}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{8}(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{\frac{1}{2}(a+b+c)}} =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{a+b+c}}$$

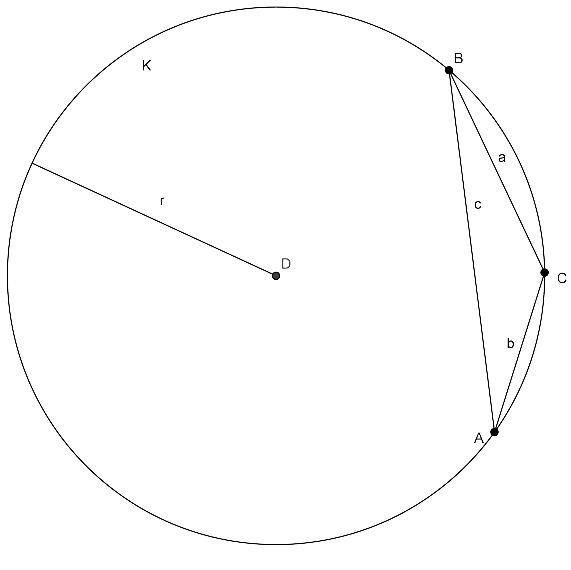
Zaradi preglednosti zamenjamo polmer s premerom in tako dobimo nasledjo lemo:

Lema 1 *Krog s premerom d' lahko vstavimo v trikotnik s stranicami a, b in c, če velja*

$$d' \leq d = \sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{a+b+c}}$$

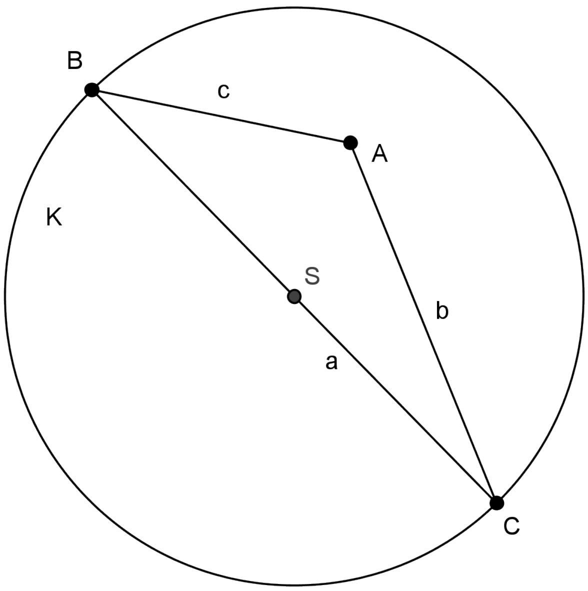
2.2 Trikotnik v krogu

Drugo vprašanje je, ali lahko trikotnik ABC vstavimo v dan krog K s polmerom r ($d = 2r$). Na prvi pogled se zdi, da je največji trikotnik, ki ga lahko vstavimo v krog K takšen, da mu je krog K očrtan. Naslednja slika (slika 3) nazorno prikaže, da to ni vedno res.



Slika 3: Očrtan krog

Z slike 3 vidimo, da bi lahko v dan trikotnik vstavili večji trikotnik. Naj velja $a \geq b \geq c$. V danem krogu bi lahko imel največji trikotnik najdaljšo stranico manjšo ali enako velikosti premera danega kroga ($a \leq d$). Če bi veljalo $a = d$, potem mora posledično glišče A ležati znotraj kroga ali na robu kroga (če leži izven kroga, dan krog ne pokrije trikotnika) in središče kroga leži na najdaljši stranici trikotnika. Predpostavimo, da velja $a = d$. Oglišče A, največjega trikotnika, ki bi ga lahko še vstavili v dan krog, bi ležalo na robu kroga. Iz lastnosti trikotnikov pa vemo, da je pri takem trikotniku kot pri oglišču A pravi kot ($\angle A = 90°$). Opravka imamo torej s pravokotnim trikotnikom in posledično s Pitagorovim izrekom ($a^2 = b^2 + c^2$), kar bomo uporabili kot mejni pogoj.



Slika 4: Središče kroga je na stranici trikotnika

Poračunajmo s pomočjo Heronovih obrazcev:

$$R = \frac{abc}{4p}$$

$$p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{(\frac{a+b+c}{2})(\frac{-a+b+c}{2})(\frac{a-b+c}{2})(\frac{a+b-c}{2})}} = \frac{abc}{4\sqrt{\frac{1}{16}(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}$$

$$R = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}$$

Če zopet zamenjamo polmer s premerom dobimo naslednjo lemo:

Lema 2 *Naj bo d' premer kroga in a, b in c stranice trikotnika ABC. Privzemimo, da velja $a \geq b \geq c$. Krog K lahko pokrije trikotnik ABC, če velja:*

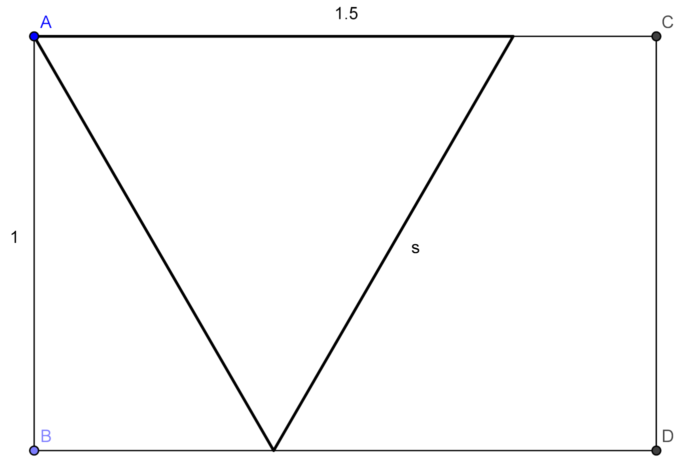
$$d' = d \geq \begin{cases} \frac{2abc}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}} & za\ a^2 \geq b^2 + c^2, \\ a & za\ a^2 \leq b^2 + c^2. \end{cases}$$

3 Trikotnik in pravokotnik

Tudi pri opazovanju lastnosti pokrivanja oz. vstavljanja pri trikotniku in kvadratu ločimo dve situaciji. V prvi situaciji iščemo največji enakostranični trikotnik, ki ga lahko vstavimo v pravokotnik, v drugi situaciji pa iščemo največji kvadrat, ki ga lahko vstavimo v nek poljuben trikotnik.

3.1 Trikotnik v kvadratu

Poiščimo največji enakostranični trikotnik s stranico s, ki ga lahko vstavimo v pravokotnik velikosti $1 \times r$, kjer je $r \geq 1$. Prav gotovo bo velikost enakostraničnega trikotnika odvisna od velikosti stranice r. Če je r „dovolj“ velik, bo stranica največjega enakostraničnega trikotnika poravnana s stranico pravokotnika r (slika 5).

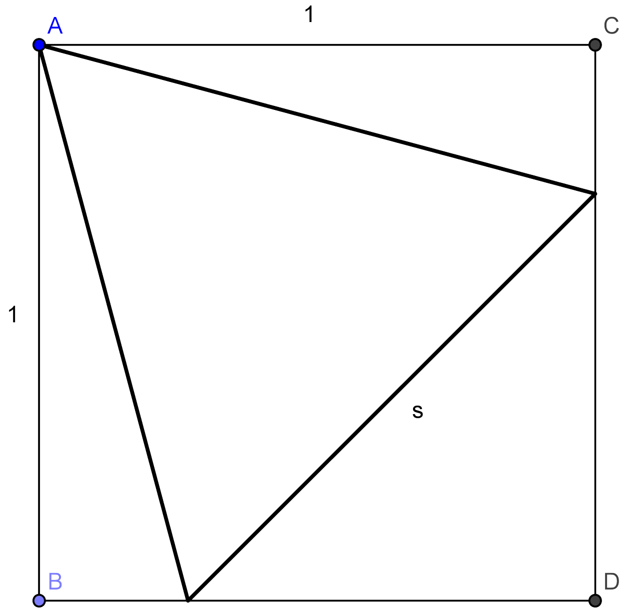


Slika 5: Enakostranični trikotnik v kvadratu

Velikost stranice našega trikotnika lahko izračunamo s pomočjo formule za višino enakostraničnega trikotnika, saj je višina dana ($v = 1$). Uporabimo formulo $v = \frac{s\sqrt{3}}{2}$, kjer je $v = 1$ in tako sledi, da meri stranica enakostraničnega trikotnika $s = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Od tod sledi, da za pravokotnik velja $r \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Kaj pa, če je $1 \leq r \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$? Če je r manjši od $\frac{2}{\sqrt{3}}$, moramo enakostranični trikotnik rahlo zavrteti kot je razvidno s slike (slika 6).

Poiščimo največjo stranico s „zavrtenega“ trikotnika. Označimo kot α in drugi kot $30° - \alpha$. Za prvi trikotnik lahko zapišemo naslednjo formulo: $\cos \alpha = \frac{1}{s}$, medtem ko za drugi trikotnik velja: $\cos(30° - \alpha) = \frac{r}{s}$. Poenostavimo drugo formulo:



Slika 6: Enakostranični trikotnik v kvadratu

$$\cos(30° - \alpha) = \frac{r}{s} \Rightarrow$$
$$\cos 30° \cos \alpha + \sin 30° \sin \alpha = \frac{r}{s} \Rightarrow$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\sin \alpha = \frac{r}{s} \Rightarrow$$
$$\frac{\sqrt{3}}{s} + \sin \alpha = \frac{2r}{s} \Rightarrow$$
$$\sin \alpha = \frac{2r}{s} - \frac{\sqrt{3}}{s}$$

Vstavimo sedaj formuli $\cos \alpha = \frac{1}{s}$ in $\sin \alpha = \frac{2r}{s} - \frac{\sqrt{3}}{s}$ v naslednjo formulo:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$
$$\frac{1}{s^2} + (\frac{2r}{s} - \frac{\sqrt{3}}{s})^2 = 1$$
$$\frac{1}{s^2} + \frac{4r^2 - 4\sqrt{3}r + 3}{s^2} = 1$$
$$1 + 4r^2 - 4\sqrt{3}r + 3 = s^2$$
$$4r^2 - 4\sqrt{3}r + 4 = s^2$$
$$s = 2\sqrt{r^2 - \sqrt{3}r + 1}$$

Sedaj smo dobili naslednjo lemo:

Lema 3 *Enakostranični trikotnik s stranico s lahko vstavimo v pravokotnik velikosti* $1 \times r$*, če velja:*

$$s \leq s_{max} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} & ,\text{če } r \geq \frac{2}{\sqrt{3}}, \\ s = 2\sqrt{r^2 - \sqrt{3}r + 1} & ,\text{če } 1 \leq r \leq \frac{2}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Naravno je, da se na tem mestu vprašamo po največjem enakostraničnem trikotniku, ki ga lahko vstavimo v enotski kvadrat. V tem primeru vstavimo vrednost $r = 1$ v dobljeno formulo in dobimo, da je stranica največjega enakostraničnega trikotnika v enotskem kvadratu dolga $2\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

3.2 Kvadrat v trikotniku

Poiščimo največji kvadrat s stranico s_{max}, ki ga lahko vstavimo v poljuben trikotnik. Označimo trikotnik s $T = \Delta ABC$ in $s_{max} = \{s_a, s_b, s_c\}$, kjer je s_a kvadrat, ki leži na stranici a, s_b kvadrat, ki leži na stranici b, in s_c kvadrat, ki leži na stranici c. Od tod sledi, da lahko kvadrat s stranico s vstavimo v trikotnik T, če velja $s \leq s_{max}$. Naša naloga je torej poiskati s_{max}.
Pred samim iskanjem s_{max} si poglejmo, kako lahko geometrijsko poiščemo največji kvadrat na izbrano stranico trikotnika. Ta postopek je izvedljiv le pri trikotnikih, kjer izbrana stranica (na katero bi radi načrtali kvadrat) ne meji na topi kot. Sam postopek je nezahteven. Izmerimo stranico a, nad katero bomo narisali največji kvadrat. Nad stranico a načrtamo kvadrat s stranico dolžine a (dobimo kvadrat $BCED$). Nato povežemo oglišče trikotnika A z ogliščema D in E. Kjer daljica AD seka stranico a, označimo točko F, in kjer daljica AE seka stranico a, označimo G. Daljica FG je stranica našega iskanega kvadrata nad stranico a (slika 7).

Poiščimo še računsko dolžino stranice našega iskanega kvadrata. Označimo poljubno stranico trikotnika z x in naj bo v_x višina na x

Lema 4 *V trikotniku* T*, kjer nobeden kot pri stranici* x *ni topi, leži stranica kvadrata* s_x *na stranici trikotnika* x *in meri* $s_x = \frac{x \cdot v_x}{x + v_x} = \frac{2 \cdot p}{x + v_x}$*, kjer je* p *ploščina trikotnika* T

Dokaz

Poglejmo si naslednje razmerje stranic in ga poenostavimo:

$$\frac{v_x}{x} = \frac{v_x - s_x}{s_x}$$

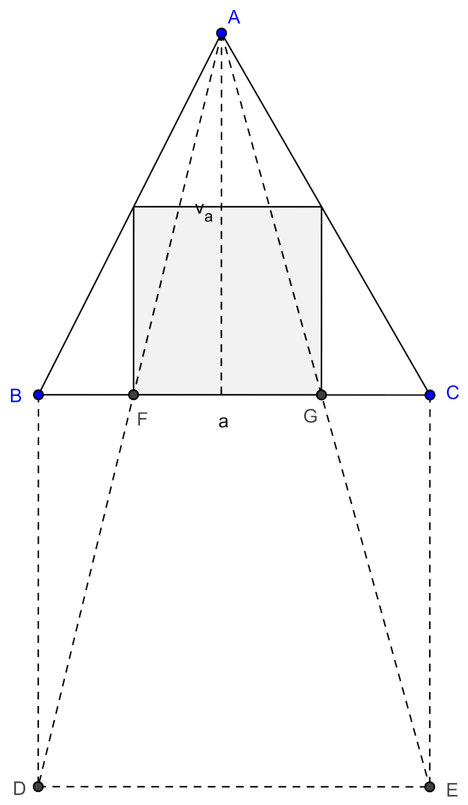
$$v_x \cdot s_x = (v_x - s_x) \cdot x$$

$$v_x \cdot s_x = v_x \cdot x - s_x \cdot x$$

$$s_x \cdot v_x + s_x \cdot x = v_x \cdot x$$

$$s_x = \frac{v_x \cdot x}{v_x + x}$$

$$s_x = \frac{2 \cdot p}{v_x + x}$$



Slika 7: Geometrijska rešitev

Naša naloga je poiskati največji takšen kvadrat. Rešitev za to nalogo je podal Brune leta 1836 in sicer z naslednjo trditvijo.

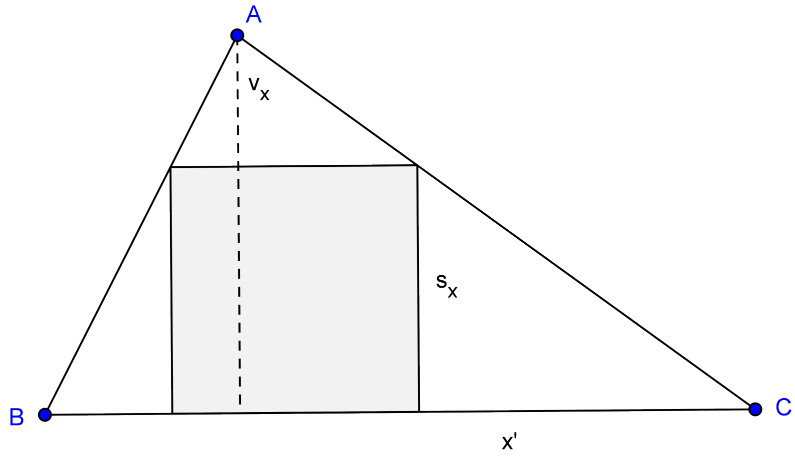
Trditev 1 *V trikotniku T veljajo naslednje trditve;*

- *Če je T ostrokoten trikotnik, potem največji iskani kvadrat leži na najkrajši stranici trikotnika T,*
- *če je T pravokoten trikotnik, potem je kvadrat, ki leži na obeh krakih, večji od kvadrata, ki leži na hipotenuzi,*
- *če je T topokoten trikotnik, imamo več rešitev (v nadaljevanju).*

Dokaz si lahko pogledate v članku avtorja John E. Wetzel: Squares in triangles [5].

Iz prejšnje trditve sledi pomembna posledica, ki nam poda velikost iskanega kvadrata.

Posledica 1 *Naj bo T ostrokoten ali pravokoten trikotnik in predpostavimo, da je c najkrajša stranica v trikotniku T. Kvadrat s stranico s lahko vstavimo v T, če velja:*



Slika 8: Razmerje stranic

$$s \leq s_c = \frac{2pc}{c^2 + 2p}$$

Dokaz
Največji kvadrat, ki ga lahko vstavimo na stranico c trikotnika T je:

$$s_c = \frac{2p}{c + v_c} = \frac{2pc}{(c + v_c)c} = \frac{2pc}{c^2 + 2p}$$

Velikost kvadrata v ostrokotnih in pravokotnih trikotnikih je sedaj znan, poglejmo še za topokotne trikotnike. Brune je vpeljal pojma notranjega in zunanjega trikotnika.

Definicija 1 *Trikotnik T, v katerem velja $a > b \geq c$, je zunanji, če $v_a \geq a(\sin\gamma + \cos\gamma - 1)$ in notranji, če $v_a \leq a(\sin\gamma + \cos\gamma - 1)$.*

Trditev 2 *(Wetzel [5]) Naj za topokoten trikotnik T velja $a > b \geq c$. Če je T zunanji, potem lahko kvadrat velikosti s vstavimo v T natanko takrat, ko velja:*

$$s \leq s_b = \frac{\sqrt{2}p}{a\sin(\gamma + 45°)}$$

in če je T notranji:

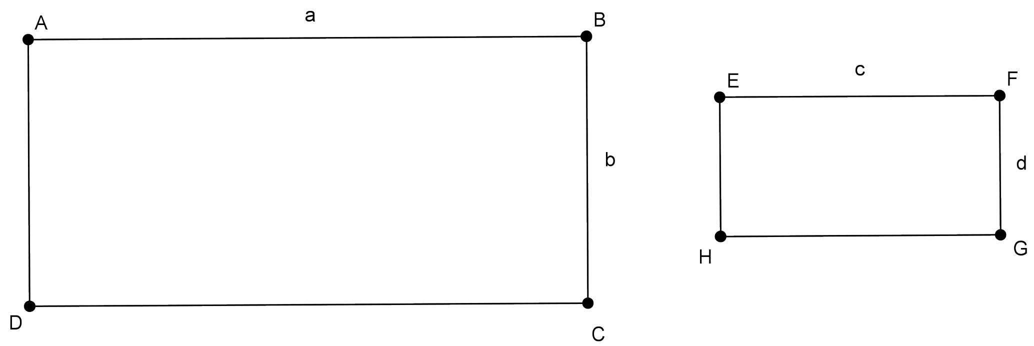
$$s \leq s_a = \frac{2pa}{a^2 + 2p}$$

Dokaz si lahko ogledate v članku avtorja John E. Wetzel: Squares in triangles [5].

4 Pravokotnik in pravokotnik

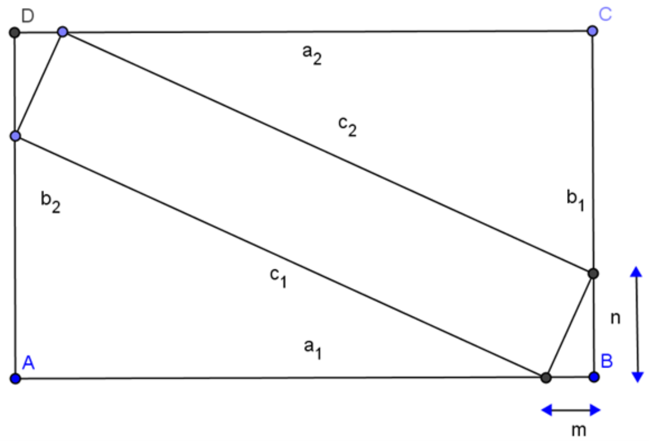
Glavno vprašanje v tem razdelku je, ali lahko dan pravokotnik vstavimo v drug dan pravokotnik. Odgovor je našel Carver, katere formule je lepo opisal Otto Dunkel.

Naj bo prvi pravokotnik $ABCD$ velikosti $a \times b$ in drugi pravokotnik $EFGH$ velikosti $c \times d$ (slika 9).



Slika 9: Pravokotnika

Predpostavimo lahko $a \geq b$ in $c \geq d$. Očitno lahko vstavimo drugi pravokotnik v prvega, če velja $c \leq a$ in $d \leq b$. Prav tako je očitno da prvi pravokotnik ne pokrije drugega, če velja $c \geq a$ in $d \geq b$. Dilema je le, če pride do situacije, kjer velja npr.: $c > a$ in $d \leq b$ (slika 10).



Slika 10: Pravokotnik v pravokotniku

Poglejmo si razmerja:

$$\frac{n}{d} = \frac{a-m}{c}$$
$$\frac{m}{d} = \frac{b-n}{c}$$

ter pravokotni trikotnik in njegov Pitagorov izrek:

$$n^2 + m^2 = d^2$$

Želimo izraziti formulo, v kateri nastopajo le spremenljivke a, b, c in d. Izrazimo n in m:

$$n = \frac{(a-m)d}{c}$$

in

$$m = \frac{(b-n)d}{c}$$

V $n = \frac{(a-m)d}{c}$ vstavimo izražen $m = \frac{(b-n)d}{c}$:

$$n = \frac{(a - \frac{(b-n)d}{c})d}{c}$$

$$n = \frac{acd - bd^2 + nd^2}{c^2}$$

$$nc^2 = acd - bd^2 + nd^2$$

$$n(c^2 - d^2) = acd - bd^2$$

$$n = \frac{acd - bd^2}{c^2 - d^2}$$

V $m = \frac{(b-n)d}{c}$ vstavimo izražen $n = \frac{(a-m)d}{c}$:

$$m = \frac{(b - \frac{(a-m)d}{c})d}{c}$$

$$m = \frac{bcd - ad^2 + md^2}{c^2}$$

$$mc^2 = bcd - ad^2 + md^2$$

$$m(c^2 - d^2) = bcd - ad^2$$

$$m = \frac{bcd - ad^2}{c^2 - d^2}$$

Izrazimo $n + m$:

$$n + m = \frac{acd - bd^2 + bcd - ad^2}{c^2 - d^2}$$

$$n + m = \frac{ad(c-d) + bd(c-d)}{(c-d)(c+d)}$$

$$n + m = \frac{(ad+bd)(c-d)}{(c-d)(c+d)}$$

$$n + m = \frac{(a+b)d}{c+d}$$

Izrazimo $n - m$:

$$n - m = \frac{acd - bd^2 - bcd + ad^2}{c^2 - d^2}$$
$$n - m = \frac{ad(c + d) - bd(c + d)}{(c - d)(c + d)}$$
$$n - m = \frac{(ad - bd)(c + d)}{(c - d)(c + d)}$$
$$n - m = \frac{(a - b)d}{c - d}$$

Kavdrirajmo dobljeni enačbi:

$$(n + m)^2 = \frac{(a + b)^2 d^2}{(c + d)^2}$$
$$n^2 + 2mn + m^2 = \frac{(a + b)^2 d^2}{(c + d)^2}$$

$$(n - m)^2 = \frac{(a - b)^2 d^2}{(c - d)^2}$$
$$n^2 - 2mn + m^2 = \frac{(a - b)^2 d^2}{(c - d)^2}$$

Seštejmo obe enačbi in uporabimo $n^2 + m^2 = d^2$:

$$2n^2 + 2m^2 = \frac{(a + b)^2 d^2}{(c + d)^2} + \frac{(a - b)^2 d^2}{(c - d)^2}$$
$$2d^2 = d^2 \frac{(a + b)^2}{(c + d)^2} + d^2 \frac{(a - b)^2}{(c - d)^2}$$
$$2 = \frac{(a + b)^2}{(c + d)^2} + \frac{(a - b)^2}{(c - d)^2}$$

Sedaj lahko podamo lemo:

Lema 5 *Predpostavimo, da velja $a \geq b$. Pravokotnik $c \times d$ lahko vstavimo v pravokotnik $a \times b$, če velja:*

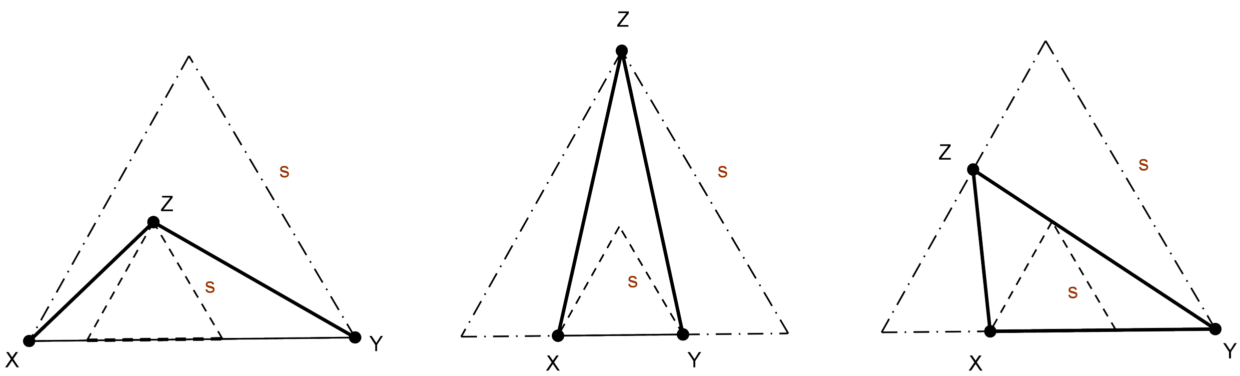
- $a \geq c$ *in* $b \geq d$ *ali*
- $a < c$, $b \geq d$ *in* $\frac{(a+b)^2}{(c+d)^2} + \frac{(a-b)^2}{(c-d)^2} \geq 2$.

5 Enakostranični trikotnik in trikotnik

V tem razdelku bomo imeli pred seboj enakostranični trikotnik in poljuben trikotnik. Glavni vprašanji sta: Kako velik enakostranični trikotnik lahko še vstavimo v poljuben trikotnik ter kako majhen enakostranični trikotnik lahko pokrije poljuben trikotnik? Vprašanja je leta 1993 postavil Karel Post. Odgovora na obe vprašanji pa sta podala Jerrard in Wetzel. Ker se odgovora dopolnjujeta, razdelka ne bom ločil na dva dela (enakostranični trikotnik zunaj trikotnika in obratno).

Naj bo T trikotnik ABC, α, β in γ koti v trikotniku T ter v_x višina v trikotniku T na stranico x. Vpeljimo še oznaki s_n za dolžino stranice enakostraničnega trikotnika, ki leži znotraj poljubnega trikotnika (trikotnik pokriva enakostranični trikotnik) in s_z za dolžino stranice enakostraničnega trikotnika, ki leži zunaj poljubnega trikotnika (enakostranični trikotnik pokriva trikotnik). Naj velja tudi: $s_n = max\left\{s_n^a, s_n^b, s_n^c,\right\}$ in $s_z = min\left\{s_z^a, s_z^b, s_z^c,\right\}$, kjer je npr. s_n^a dolžina stranice enakostraničnega trikotnika, ki pokrije poljuben trikotnik na stranico a.

Sedaj pa naš poljuben trikotnik $T = \Delta ABC$ označimo s točkami X, Y, Z na naslednji način. Naj bo Z katerokoli oglišče trikotnika, X in Y pa ostali dve oglišči trikotnika tako, da bo veljalo $\angle X \geq \angle Y$. Označimo še stranico $XY = z$ ter kot α' pri oglišču Z, kot β' pri oglišču X in kot γ' pri oglišču Y. Če sedaj pogledamo naš na novo označen trikotnik („postavljen“ na stranico z) in mu dodamo največji notranji in najmanjši zunanji enakostranični trikotnika, dobimo naslednje tri možnosti:



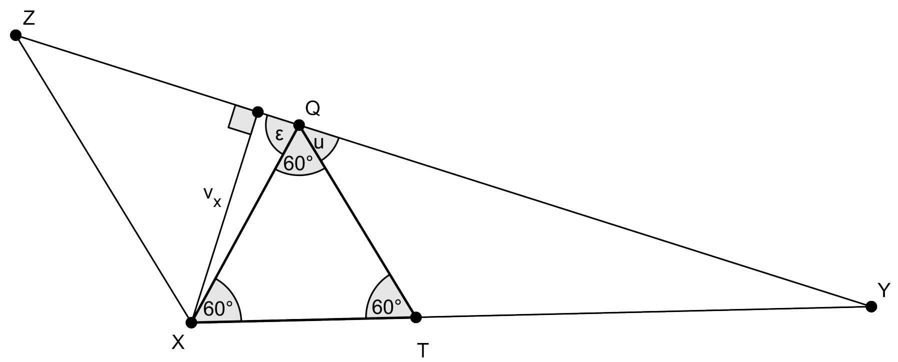
Slika 11: Tri možnosti postavitve enakostraničnih trikotnikov

Lema 6 *Naj velja $\angle X \geq \angle Y$ v trikotniku XYZ.*

1. *Če je $\beta' \leq 60°$ in $\gamma' \leq 60°$, potem je $s_n^z = \frac{2}{\sqrt{3}} v_z$ in $s_z^z = z$.*
2. *Če je $\beta' \geq 60°$ in $\gamma' \geq 60°$, potem je $s_n^z = z$ in $s_z^z = \frac{2}{\sqrt{3}} v_z$.*
3. *Če je $\beta' \geq 60°$ in $\gamma' \leq 60°$, potem je $s_n^z = \frac{v_x}{sin(60° + \gamma')}$ in $s_z^z = \frac{2}{\sqrt{3}} x \cdot sin(60° + \gamma')$.*

Dokaz

Možnost 1 in 2 sta očitni (uporabili smo formulo za izračun višine enakostraničnega trikotnika: $v = \frac{s\cdot\sqrt{3}}{2}$).
Natančneje poglejmo možnost 3. Najprej poiščimo formulo za s_n^z. Poglejmo, koliko meri kot pri Q za trikotnik TQY (slika 12):



Slika 12: Notranji trikotnik

$$180° = 120° + \gamma' + u$$
$$u = 60° - \gamma'$$

Sedaj pa poglejmo kot pri Q za trikotnik XQZ in upoštevajmo, da meri iztegnjeni kot 180°:

$$\angle Q = 180° - (60° - \gamma') - 60°$$
$$\angle Q = 60° + \gamma'$$

Vnesimo kot v sinusni izrek za trikotnik XQZ:

$$v_x = s_n^z \cdot \sin(60° + \gamma')$$
$$s_n^z = \frac{v_x}{\sin(60° + \gamma')}$$

Dokažimo še s_z^z:

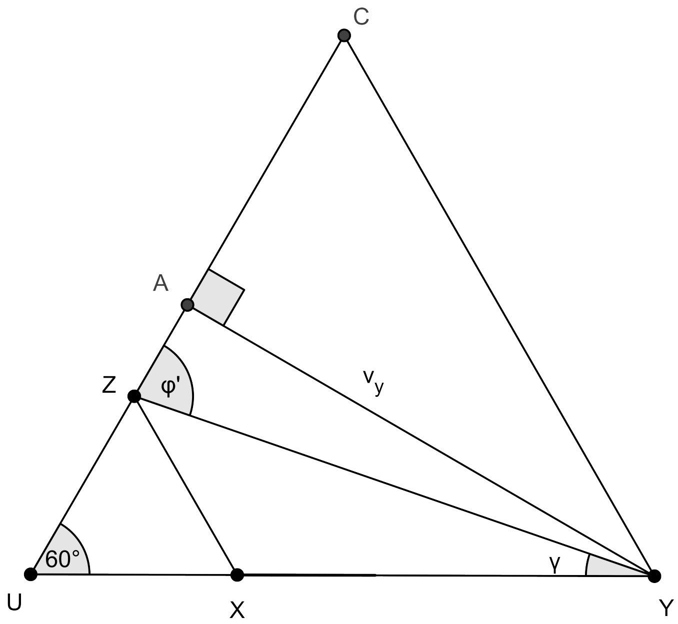
Poglejmo kot $\angle UZY$ v trikotniku UYZ (slika 13):

$$\angle Z = 180° - 60° - \gamma'$$
$$\angle Z = 120° - \gamma'$$

Poiščimo sokot kota $\angle UZY$ in ga označimo z φ':

$$\varphi' = 180° - (120° - \gamma')$$
$$\varphi' = 60° + \gamma'$$

Uporabimo formulo za izračun višine enakostraničnega trikotnika in sinusni izrek:



Slika 13: Zunanji trikotnik

$$s_z^z = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot v_x$$

$$s_z^z = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot x \cdot sin\varphi'$$

$$s_z^z = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot x \cdot sin(60^\circ + \gamma')$$

Opomba 1 *Za katerokoli stranico z v trikotniku XYZ velja:*

$$s_n^z \cdot s_z^z = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot p_{ABC}$$

kjer je p_{ABC} ploščina trikotnika ABC.

Dokaz Uporabimo formule iz leme in dejstvo, da je $p_{ABC} = \frac{v_z \cdot z}{2}$:

$$s_n^z \cdot s_z^z = \frac{2}{\sqrt{3}} v_{z \cdot z}$$

$$s_n^z \cdot s_z^z = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 2 \cdot p_{ABC}$$

$$s_n^z \cdot s_z^z = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot p_{ABC}$$

Opomba 2 *Za katerikoli stranici x in y v trikotniku ABC velja:*

$$s_n^x \leq s_n^y \Leftrightarrow s_z^x \geq s_z^y$$

Dokaz si lahko pogledate v članku [1].

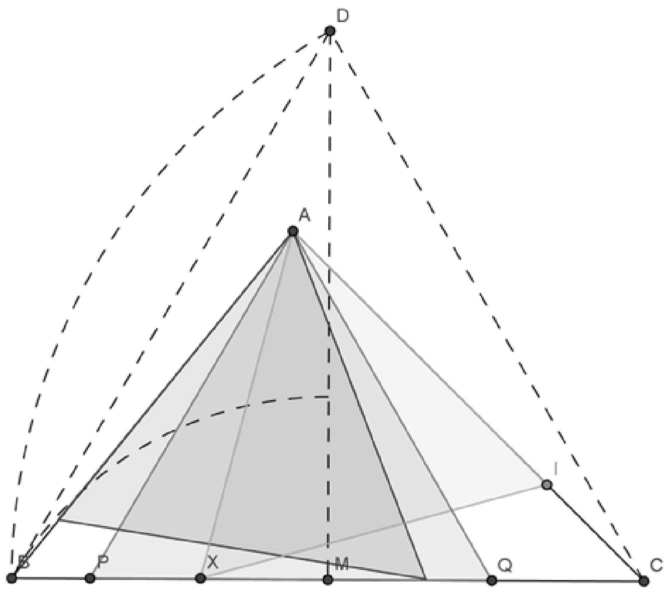
Zaradi opombe 2 lahko obravnavamo le enakostranične trikotnike v notranjosti trikotnika.

Problem notranjih trikotnikov

Vrnimo se sedaj na začetno notacijo trikotnika $T = ABC$ in privzemimo, da velja $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Tu nastopijo dve možnosti in sicer $\beta \leq 60°$ ali $\beta > 60°$

1. možnost: $\beta \leq 60°$

S prekinjenimi daljicami dorišimo enakostranični trikotnik BCD z dolžino stranice BC (kot pri oglišču B enakostraničnega trikotnika je $60°$). Dorišimo tudi lok BD s polmerom BC ter lok BE tako, da bo veljalo $\angle BEC = 120°$ (slika 14).



Slika 14: 1. možnost

Lema 7 *Naj bo* $\beta \leq 60°$. *Potem velja:*

- $s_n^a \geq s_n^b \geq s_n^c (oz. s_z^a \leq s_z^b \leq s_z^c)$, *ko je* $60° \leq \alpha \leq 120°$ *in*
- $s_n^a \geq s_n^c \geq s_n^b (oz. s_z^a \leq s_z^c \leq s_z^b)$, *ko je* $\alpha \geq 120°$

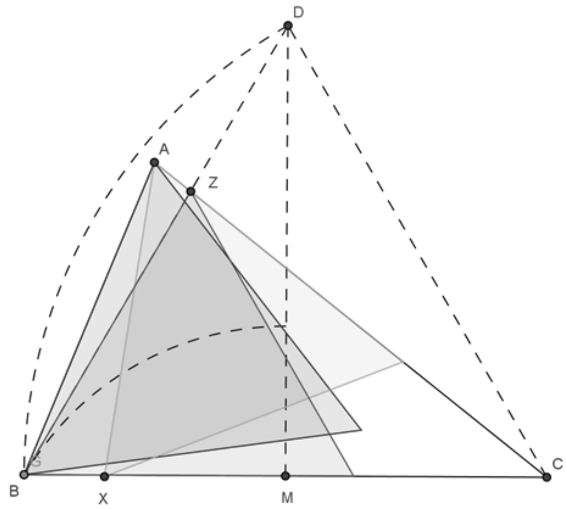
Dokaz: Dokaz si lahko ogledate v članku[1].

2. možnost: $\beta > 60°$

Pri tej možnosti leži oglišče A v krožnem odseku BD, in velja $60° \leq \alpha < 120°$ ter $s_n^c = c$ (slika 15).

Lema 8 *Naj bo* $\beta \leq 60°$. *Potem velja:*

$$s_n^a \geq s_n^b$$

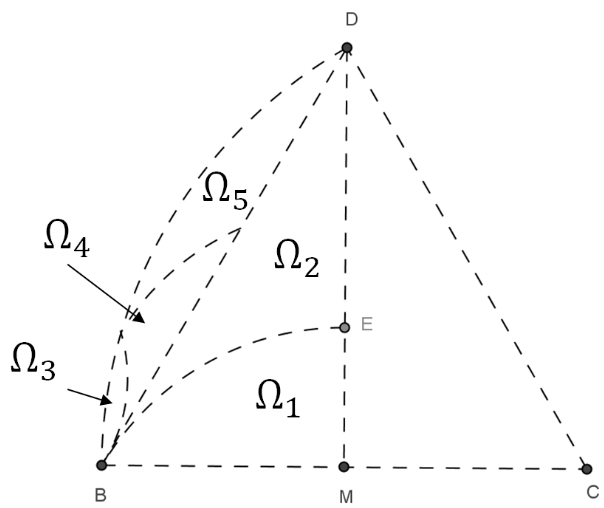


Slika 15: 2. možnost

(oz. $a_z^a \leq s_z^b$).

Dokaz si lahko ogledate v članku[1].

Uredimo sedaj dobljene leme v končno trditev. Za lažjo predstavo in formulacijo definirajmo polja:



Slika 16: Polja

- $\Omega_1 = \{A : \alpha \leq 120°\}$,
- $\Omega_2 = \{A : \alpha \geq 120°, \beta \leq 60°\}$,
- $\Omega_3 = \left\{A : \beta \geq 60°, c \leq a\frac{\sin(\beta - 60°)}{\sin(2\beta - 60°)}\right\}$,

- $\Omega_4 = \left\{ A : \beta \geq 60°, a\frac{\sin(\beta - 60°)}{\sin(2\beta - 60°)} \leq c \leq a\frac{\sin(60° - \frac{\beta}{2})}{\sin(60° + \frac{\beta}{2})} \right\}$
- $\Omega_5 = \left\{ A : \beta \geq 60°, c \geq a\frac{\sin(60° - \frac{\beta}{2})}{\sin(60° + \frac{\beta}{2})} \right\}$

Trditev 3 *Oba trikotnika (notranji in zunanji) ležita na najkrajši stranici c v trikotniku T, ko A leži v območju Ω_5 in na najdaljši stranici a v trikotniku T, ko A leži v območju $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ in Ω_4. Njuni stranici merita:*

$$s_n = \begin{cases} s_n^c = c & , ko\ A \in \Omega_5, \\ s_n^a = a\frac{\sin\gamma}{\sin(60° + \gamma)} & , ko\ A \in \Omega_3 \cup \Omega_4, \\ s_n^a = \frac{4 \cdot p_{ABC}}{a\sqrt{3}} & , ko\ A \in \Omega_1 \cup \Omega_2. \end{cases}$$

in

$$s_z = \begin{cases} s_z^c = \frac{4 \cdot p_{ABC}}{a\sqrt{3}} & , ko\ A \in \Omega_5, \\ s_z^a = \frac{4 \cdot p_{ABC}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sin(60° + \gamma)}{a \sin\gamma} & , ko\ A \in \Omega_3 \cup \Omega_4, \\ s_z^a = a & , ko\ A \in \Omega_1 \cup \Omega_2. \end{cases}$$

Od tod sledi: če imamo podan enakostranični trikotnik Ψ s stranico s in poljuben trikotnik T s stranicami a, b, c (za katere velja $a \leq b \leq c$), potem lahko Ψ vstavimo v T, ko $s \leq s_n$ in Ψ pokrije T, ko $s \geq s_z$.

6 Trikotniki in trikotniki

Vprašanje, ali nek dan trikotnik pokrije drug dan trikotnik, je leta 1964 podal H. Steinhaus. Rešitev je bila znana leta 1993. Predstavil jo je nemški matematik Karl Post.

Trditev 4 *Imejmo trikotnika T s stranicami a, b, c in ploščino p ter T' s stranicami a', b', c' in ploščino p'. Trikotnik T lahko vstavimo v T', ko velja naslednja neenačba:*

$$max\left\{p(b'^2 + c'^2 - a'^2), p'(b^2 + c^2 - a^2)\right\} + max\left\{p(a'^2 + c'^2 - b'^2), p'(a^2 + c^2 - b^2)\right\} \leq 2pcc'$$

Dokaz sem izpustil in si ga lahko ogledate v članku[8].

7 Zaključek

V tem seminarju je zajetih le nekaj primerov ujemanja in pokrivanja likov. V literaturi pa je predstavljenih in rešenih še veliko podobnih nalog iz pokrivanja likov. Na videz nepomebni rezultati imajo uporabno vrednost. Med drugim so uporabljeni pri t.i. „worm problems“ (problem črva). Znan problem iz sklopa „worm problems“ je Izgubljeni v gozdu (angl.: Lost in a forest), kjer se sprehalec izgubi v gozdu. Obliko in velikost gozda sprehajalec natančno pozna. Postavi se vprašanje po kateri poti naj gre sprehajalec, da bo v najkrajšem času dosegel rob gozda? Iščemo torej pot (krivuljo), ki jo še lahko vstavimo v „tloris“ gozda. Problem je predstavil R. Bellman. Več pa v literaturi, ki jo omenjam spodaj.

Literatura

[1] R. P. Jerrard and J. E. Wetzel: *Equilateral triangles and triangles*, Amer. Math. Monthly 109 (2002), 909-915.

[2] . E. Wetzel: *Boxes for isoperimetric triangles*, Magazine, 73 (2000), 315-319.

[3] . E. Wetzel: *Rectangles in rectangles*, Magazine, 73 (2000), 204-211.

[4] . E. Wetzel: *Rectangles in triangles*, J. Geom., 81 (2004) 180 – 191.

[5] . E. Wetzel: *Squares in triangles*, Math. Gazette 86 (2002), 28-34.

[6] . E. Wetzel: *Fits and Covers*, Math. Magazine 76 (2003), 349-363.

[7] . Bailey and D. Detemple: *Squares Inscribed in Angles and Triangles*, Math. Magazine 71 (1998), 278-284.

[8] S. R. Finch and J. E. Wetzel: *Lost in a Forest*, The Amer. Math. Monthly 111 (2004), 645-654.

[9] K. A. Post: *Triangle in a triangle: On a problem of Steinhaus*, Geom. Dedicata 45 (1993), 115-20.